NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-
-
-

Travail de groupe n° 6

1 heure

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	BONUS	Tenue du groupe
Total	4	6	8	2	2

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$$

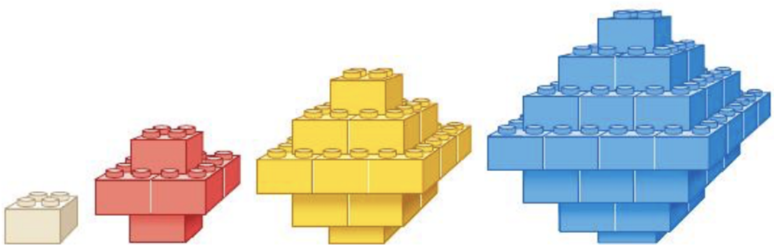
On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

1. Pour tout entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.
3. Compléter l'algorithme ci-dessous, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 5,99$.

```
def algo ( ) :
    n= 0
    u= 1
    while ...

        n= ...

        u= ...

    return(n)
```

Exercice 2

Maëlys a fabriqué une succession d'octaèdres pleins avec des briques de construction carrées. Voici ses premières constructions.



Sa première construction est constituée d'une seule brique, la seconde de 6 et la troisième de 19.

1. Combien y a-t-il de briques carrées dans sa quatrième construction ?
2. On note B_n le nombre de briques carrées nécessaires à la construction du $n^{ième}$ octaèdre, où n désigne un nombre entier naturel non nul.
   Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = 2 \times (1 + 2^2 + \cdots + n^2) - n^2$
3. On admet que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = \dfrac{2n^3 + n}{3}$
4. Combien de briques le dixième octaèdre compte-t-il ?
5. Quel est le plus grand octaèdre que l'on peut construire avec 2 000 briques carrées ?

Exercice 3

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.

Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. On admet que sur $[0\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = 10 \times u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
   En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer $f(20)$.
   En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.
3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
   On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
   On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que :
   $$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}(1 + u(x))$$
   (a) Déterminer les variations de f' sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

BONUS :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

1. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$
3. Donner le tableau de signes de f' et de variation de f.